Groupe A

MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

Préambule

On note $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes et $GL_n(\mathbb{C})$ le groupe de ses éléments inversibles. Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice P dans $GL_n(\mathbb{C})$ telle que $PBP^{-1} = A$. Si A appartient à $M_n(\mathbb{C})$, on note Z (A) le sous-espace de $M_n(\mathbb{C})$ formé des matrices commutant à A, puis C (A) le sous-espace des matrices de la forme BA − AB où B parcourt $M_n(\mathbb{C})$, et on identifie parfois A à l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{C}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique.

Si $A_1, \ldots, A_l$ sont des matrices carrées d'ordres respectifs $n_1, \ldots, n_l$, on note diag $((A_i)) = \text{diag}(A_1, \ldots, A_l)$ la matrice carrée d'ordre $n_1 + \ldots + n_l$ formée des blocs diagonaux successifs $A_1, \ldots, A_l$ et de 0 partout ailleurs. Si $k \geqslant 1$, on note I_k la matrice unité d'ordre k et

$$J(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice carrée d'ordre k dont les coefficients $J(k)_{i,j}$ valent 1 si $j = i + 1$ et 0 sinon; ainsi $J(1) = (0)$. La notation $\underline{\underline{k}} = (k_1, \ldots, k_r)$ désignera toujours une suite d'entiers telle que $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_r \geqslant 1$. Si $\underline{\underline{k}}$ est une telle suite, on note $J(\underline{\underline{k}}) = \text{diag}((J(k_i))$, puis, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $J(\lambda ; \underline{\underline{k}}) = \lambda I_n + J(\underline{\underline{k}})$ avec $n = k_1 + \ldots + k_r$.

On appelle matrice *réduite* toute matrice de la forme diag $((J(\lambda_i ; \underline{\underline{k_i}}))$ où, i étant un entier compris entre 1 et l, les λ_i sont des nombres complexes distincts et les $\underline{\underline{k_i}}$ des suites d'entiers comme ci-dessus. Deux telles matrices sont dites du même type si les deux familles de suites $(\underline{\underline{k_i}})$ sont les mêmes à permutation près des indices i.

Tournez la page S. V. P.

Si E et F sont deux espaces vectoriels complexes, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, et, si A est l'une d'elles, on note A (G) l'image par A d'un sous-espace G de E ; on pose $\text{Im } A = A(E)$. Si E est de dimension finie, on note dim E sa dimension.

L'objet du problème est de trouver des familles de matrices aussi simples que possible, auxquelles on puisse réduire, de façon régulière, toutes les matrices proches d'une matrice donnée.

Les parties I *et* V *d'une part,* II III, *et* IV *d'autre part sont essentiellement indépendantes. On pourra utiliser dans la réponse à toute question les résultats énoncés en clair dans les questions antérieures.*

I

1° Écrire, pour $n = 2, 3$, une liste complète de matrices réduites de tous les types possibles. Calculer le nombre $\omega(n)$ des divers types possibles pour $n \leqslant 6$.

2° Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^{h+1} = 0$. On pose $E = \mathbb{C}^n$ et $E_i = A^i(E)$ pour $i = 0, 1, \ldots$

a. Montrer que si A est semblable à $J(\underline{\underline{k}})$, celle-ci est déterminée de manière unique par A. On pourra calculer $\dim E_i - \dim E_{i+1}$ en fonction des nombres $s_{\underline{\underline{k}}}(j)$ définis par $s_{\underline{\underline{k}}}(j) = \text{card}\{ i \mid k_i = j \}$.

b. Montrer que A est semblable à une matrice $J(\underline{\underline{k}})$ pour $\underline{\underline{k}}$ convenable. On pourra, par récurrence descendante sur i de $i = h$ à $i = 0$, écrire $E_i = E_{i+1} \oplus L_i \oplus N_i$ de telle sorte que $A(N_i) = 0$ et que la restriction de A à L_i définisse un isomorphisme de L_i sur $L_{i+1} \oplus N_{i+1}$; initialement $L_{h+1} = N_{h+1} = 0$. On en déduira une décomposition $L_0 = L_{0,h} \oplus \ldots \oplus L_{0,i}$ telle que la restriction de A^i définisse un isomorphisme de $L_{0,i}$ sur N_i pour $h \geqslant i \geqslant 1$, et par suite une décomposition convenable de E.

3° En déduire que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice réduite diag $((J(\lambda_i ; \underline{\underline{k_i}}))$, unique à permutation près des indices i.

ENS ULM SEVRES 84

II

Tout espace vectoriel complexe peut être considéré *a fortiori* comme un espace vectoriel réel, par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$.

Soient E et F deux espaces vectoriels complexes de dimension finie et f : U $\longrightarrow$ F une application d'un ouvert U de E dans F. On dit que f est *lisse* si elle est continûment différentiable, comme fonction définie sur un ouvert de l'espace vectoriel réel E à valeurs dans l'espace vectoriel réel F, et si, pour tout $x \in U$, sa différentielle $f'(x)$ en x est une application $\mathbb{C}$-linéaire de E dans F.

Soient f : U $\longrightarrow$ F une telle fonction lisse, $x_0 \in U$ et $y_0 = f(x_0)$. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

i. $f'(x_0)$: E $\longrightarrow$ F est surjective ;

ii. Il existe un voisinage ouvert V de y_0 dans F et une fonction lisse g : V $\longrightarrow$ E définie sur V et à valeurs dans E, tels que $f \circ g = id_V$.

On pourra commencer par étudier le cas dim E = dim F.

III

Soit $A_0 \in M_n(\mathbb{C})$. On appelle *déformation*, de dimension r, de A_0 toute fonction lisse A : U $\longrightarrow$ $M_n(\mathbb{C})$ définie sur un voisinage ouvert U de O dans un espace vectoriel complexe E de dimension r, et telle que $A(0) = A_0$. On dit qu'elle est *ample* s'il existe un voisinage ouvert V de A_0 dans $M_n(\mathbb{C})$ et deux fonctions lisses φ : V $\longrightarrow$ U $\subset$ E et P : V $\longrightarrow$ $GL_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$ tels que

$$P(M)\, M\, P(M)^{-1} = A(\varphi(M)) \quad \text{pour tout } M \in V$$

$$\varphi(A_0) = 0$$

$$P(A_0) = I_n .$$

On la dit *universelle* si elle est ample et si en outre, étant donnés deux triplets (V, φ, P) et (V', φ', P') vérifiant les conditions ci-dessus, il existe un voisinage ouvert V'' de A_0 dans $M_n(\mathbb{C})$ contenu dans $V \cap V'$, sur lequel φ et φ' coïncident.

1° Soit $A_0 = \text{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ où les a_i sont des nombres complexes distincts.

Montrer que l'application A : U $\longrightarrow$ $M_n(\mathbb{C})$ définie sur un voisinage ouvert convenable U de O dans $\mathbb{C}^n$ par $A(u) = A(u_1, \ldots, u_n) = \text{diag}(a_1 + u_1, \ldots, a_n + u_n)$ est une déformation universelle de A_0.

2° Soit $A_0 \in M_2(\mathbb{C})$. Indiquer (en justifiant les réponses), suivant le type de A_0, s'il existe une fonction lisse, ou une fonction continue P : U $\longrightarrow$ $GL_2(\mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C})$ définie sur un voisinage ouvert convenable U de A_0, telle que $P(M)\, M\, P(M)^{-1}$ soit une matrice *réduite* pour tout $M \in U$, et que $P(A_0) = I_2$. En déduire dans quels cas A_0 admet une déformation ample formée de matrices réduites.

3° Soient, pour $n = 2$, les déformations suivantes, la première de la matrice O, les autres de la matrice J (2) :

$$A(u) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \quad B(u) = \begin{pmatrix} u_1 & 1 + u_2 \\ 0 & u_3 \end{pmatrix},$$

$$C(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}$$

où $u = (u_i) \in \mathbb{C}^r$. Indiquer, pour chacune d'elles, en justifiant les réponses, si elle est ample, si elle est universelle.

IV

1° Soit $A_0 \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'une déformation A de A_0 de dimension r, définie sur un voisinage ouvert U de O dans un espace vectoriel complexe E, est ample si et seulement si

$$M_n(\mathbb{C}) = Im\, A'(0) + C(A_0)$$

où $A'(0) : E \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ est la différentielle de A en O et le membre de droite la somme dans $M_n(\mathbb{C})$ des deux sous-espaces vectoriels $Im\, A'(0)$ et $C(A_0)$.

En déduire une minoration de r en fonction de A_0.

Tournez la page S. V. P.

2° Montrer que l'application $A : \mathbb{C}^n \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$A(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & u_n \end{pmatrix}$$

(de façon précise : $A(u)_{i,i+1} = 1$, $A(u)_{n,i} = u_i$ et $A(u)_{i,j} = 0$ sinon) est une déformation ample de $J(n)$: on note $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$. Est-elle universelle ?

V

1° Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on note A^* la matrice adjointe ${}^t\bar{A}$, transposée de sa conjuguée et $Tr\ A$ la trace de A. Montrer que l'application qui associe à $(A, B) \in M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ le scalaire $(A|B) = Tr(AB^*)$ est un produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel complexe $M_n(\mathbb{C})$. Soit $A_0 \in M_n(\mathbb{C})$: montrer que le sous-espace vectoriel $C(A_0)$ a pour orthogonal dans l'espace hermitien $M_n(\mathbb{C})$ ainsi défini le sous-espace $Z(A_0)^*$ formé des matrices B^* où B parcourt $Z(A_0)$.

2° Déterminer $Z(A_0)$ pour $A_0 = J(k)$. On pourra, avec les notations de I.2° *b.*, considérer l'application $Z(A_0) \longrightarrow \mathcal{L}(\overline{\overline{L_0}}, E)$ obtenue par la restriction au sous-espace L_0 (d'un endomorphisme de E commutant à A_0) et déterminer son image. Exprimer $\dim Z(A_0)$ en fonction de $k_1, \ldots, k_r$.

3° Soit $A_0 = \operatorname{diag}((J(\lambda_i ; k_i))$ une matrice réduite quelconque. Déterminer $Z(A_0)$ et calculer $\dim Z(A_0)$ en fonction de (k_i). Quel est le minimum de $\dim Z(A_0)$ lorsque A_0 parcourt $M_n(\mathbb{C})$?

Pour quelles matrices A_0 ce minimum est-il atteint? Caractériser ces matrices d'après leur type. Montrer aussi que ce sont exactement les matrices A_0 telles que $Z(A_0)$ soit une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que ces mêmes matrices A_0 forment un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$, muni de sa topologie naturelle d'espace vectoriel complexe.

Suite ⟶

VI

1° Soit $A_0 \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'application affine $Z(A_0)^* \xrightarrow{A} M_n(\mathbb{C})$ définie par $A(B) = A_0 + B$ est une déformation ample de A_0. Est-elle de dimension minimum parmi toutes les déformations amples de A_0 ?

2° Expliciter des déformations amples aussi simples que possible dans les cas suivants :

a. $n = 2$ et A_0 réduite quelconque

b. $n = 3$ et A_0 réduite quelconque

c. $A_0 = J(a ; 3, 2)$

d. $A_0 = \operatorname{diag}(J(a ; 2, 1), J(b ; 2))$ avec $a \neq b$

3° Montrer qu'une déformation universelle de A_0 est de dimension minimum parmi les déformations amples de A_0. Montrer que s'il existe une déformation ample de A_0 de dimension minimum, mais non universelle, alors A_0 ne possède pas de déformation universelle.

4° Établir, pour $n = 2, 3$, pour quelles matrices A_0 il existe une déformation universelle. Pour analyser le cas de $J(2, 1)$ on pourra s'intéresser à des déformations de dimension 1 du type

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ h(t) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5° Traiter la question précédente pour n quelconque : on caractérisera les matrices A_0 qui possèdent une déformation universelle, d'abord d'après leur type, ensuite d'après la dimension minimum d'une déformation ample. Étudier en priorité le cas de $J(k_1, k_2)$ avec $k_1 \geqslant k_2 \geqslant 1$. On pourra, dans ce cas, établir l'existence de deux matrices $B \in Z(A_0^*)$ et $C \in Z(A_0) \cap Z(A_0^*)$ ne commutant pas et considérer la déformation de dimension 1 donnée par $A(t) = (I_n + tC)(A_0 + tB)(I_n + tC)^{-1}$ sur un voisinage ouvert convenable de 0 dans $\mathbb{C}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail